МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ В КЛАССЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Журавлёв Ю.И.
Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

9-я Международная конференция "Дискретные модели в теории управляющих систем"
Посвящается 90-летию со дня рождения С.В. Яблонского

Булева функция задана перечнем всех нулевых наборов

$$M = \left\| \alpha_j^i \right\|_{k \times n} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \dots & \alpha_n^k \end{bmatrix}$$

Практические применения

1010110...
0101011...
0010101...
1010000...
0001111...
0111000...

Dhruv Mubayi, György Turán, Yi Zhao The DNF exception problem // Theoretical Computer Science, Volume 352, Issues 1–3, 7 March 2006, Pages 85–96

Методы построения ДНФ

метод Нельсона

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\mathop{\&}_{i=1}^{k}(x_1^{\sigma_{i1}}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_{in}})$$

$$x\,\&\,x=x,\; x\,\&\,\bar{x}=0,\; x\,\&\,y=y\,\&\,x,$$

$$K_1K_2\vee K_1=K_1,\; K_1\vee K_1=K_1.$$

Формула С.В. Яблонского

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_n)\,\&\,(\bar{x}_1 \vee \ldots \vee \bar{x}_n) = x_{t_1}\bar{x}_{t_2} \vee \ldots \vee x_{t_{n-1}}\bar{x}_{t_n} \vee x_{t_n}\bar{x}_{t_1}$$

в нельсоновской схеме перемножать $]k/2[$ скобок,
но не получим сокращённую ДНФ.

Ю.И. Журавлёв и А.Ю. Коган обобщили на случай k=3,4

1. В матрице M_f отсутствуют нулевые и единичные столбцы;
2. Одинаковые столбцы в матрице M_f расположены последовательно;
3. Из любых двух двойственных столбцов (один из которых является отрицанием другого) в матрице M_f присутствует не более одного столбца.

Работы Ю.И.Журавлёва и А.Ю.Когана

Журавлев Ю.И., Коган А.Ю. Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // Докл. АН СССР. – 1985. Т. 285. № 4. – С. 795–799.

Журавлев Ю.И., Коган А.Ю. Алгоритм построения дизъюнктивной нормальной формы, эквивалентной произведению левых частей булевых уравнений нельсоновского типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. Т. 26. № 8. – С. 1243–1249.

Коган А.Ю. Дизъюнктивные нормальные формы булевых функций с малым числом нулей. Каталог функций с четырьмя нулями. – М.: ВЦ АН СССР, 1986. – 18с.

Коган А.Ю. Методы минимизации бинарных функций с малым числом нулей: Дис. … канд. физ.-матем. наук. М. ВЦ АН СССР. 1987. – 138с.

Приведённая функция

идея Б.И. Финикова

0 0 0 1 1 0 $x_1 \& x_2$	0 0 0 0 1 1 1 0 1 **полная функция, k=3**

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1

полная функция, k=4

$2^{k-1}-1$ **столбцов**

0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0	$x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 x_4$

Лемма (Журавлёв, Коган)

$$|D_{\text{крат}}| \le \frac{nk}{2}$$

Теорема (Журавлёв, Коган)

Если $k < \log_2 n - \psi(n)$, $\psi(n) \to +\infty$, то любая функция может быть реализована ДНФ длины

$$n + o(n).$$

Лемма (Журавлёв, Коган)

При $k \le \log_2 n - \log_2 \log_2 n + 1$ для почти всех функций $f \in P_k^n$ соответствующая им приведённая функция φ – полная и справедливо

$$|D_f^{\text{тупик}}| \le n - 2^{k-1} + 1 + |D_\varphi^{\text{тупик}}|,$$

причём тупиковая ДНФ $D_f^{\text{тупик}}$ функции f строится непосредственно по тупиковой ДНФ $D_\varphi^{\text{тупик}}$ функции φ.

Реализация полных функций

Для полных функций $|D_f^{\text{крат}}| = n + o(n)$

n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
n	n+1	n+3	n+7 n+6 n+14	n+12 n+31	n+23 n+66	n+39 n+133	n+75 n+271

Кириллов А. Дипломная работа «Дизъюнктивные нормальные формы специального вида для функций с малым количеством нулей».

Задоян К.В. Об одной булевой функции с малым числом нулей // Математические методы в распознавании образов и дискретной оптимизации. – М: ВЦ АН СССР, 1990. – С. 57–65.

Сложность полных функций

	Число конъюнкий	Число букв
Журавлёв, Коган	$2n(1+o(1))$	$4n(1+o(1))$
Дьяконов	$n(1+o(1))$	$\Theta(n\sqrt{\log n})$
Максимов	$n(1+o(1))$	$3n(1+o(1))$

из работы Ю. В. Максимов Кратчайшие и минимальные дизъюнктивные нормальные формы полных функций // arXiv:1501.01331v1 [math.CO] 6 Jan 2015

Редукционный алгоритм

~ асимптотически кратчайшие ДНФ булевой функции по перечню её нулей

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_j f(x_1,\ldots,x_{j-1},1,x_{j+1},\ldots,x_n) \vee \bar{x}_j f(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n) =$$
$$= x_j f_1(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n) \vee \bar{x}_j f_2(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)$$

Если задавать функцию перечнем нулевых интервалов

При $n \geq k$ существует функция, заданная матрицей нулевых интервалов размера $k \times n$, такая, что её сокращённая ДНФ является тупиковой и имеет длину d, $d \geq \lfloor n/k \rfloor^k$.

```
0...0-...--...--...-
-...-0...0-...--...-
-...--...-0...0-...-
-...--...--...-0...0
```

$$f = (x_1 \vee \ldots \vee x_{\lfloor n/2 \rfloor}) \,\&\, (x_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \vee \ldots \vee x_n),\ n \geq 2,$$

КНФ длины 2 $\to$ ДНФ длины $\lfloor n/2 \rfloor \cdot]n/2[$

Результаты А.А.Алексаняна

Дизъюнктивные нормальные формы над линейными функциями (ЛДНФ): $K_1 \vee \ldots \vee K_q$, где

$$K_i = \mathop{\&}_{t \in \{1,2,\ldots,T(i)\}} (\alpha_{t,i}^0 \oplus (\alpha_{t,i}^1 \,\&\, x_1) \oplus \ldots \oplus (\alpha_{t,i}^n \,\&\, x_n)),$$

За счёт такого «расширения» понятия ДНФ удаётся экономное представление функций формулами и построение эффективных алгоритмов синтеза этих формул. Например, задачу построения ЛДНФ по матрице нулей размера $k \times n$ удаётся свести к аналогичной задаче с матрицей размера $k \times t$, где $t < k$.

Кратчайшая ЛДНФ булевой функции с k нулями, $k \leq 10$, содержит не более $(n+2)$-х конъюнкций.

Алексанян А.А. Дизъюнктивные нормальные формы над линейными функциями (Теория и приложения) / Под ред. Ю.И. Журавлёва. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1990. – 200с.

Функции k-значной логики

Функциями k-значной логики называются функции вида $f(x_1,\ldots,x_n):(\mathrm{E}_k)^n\to\mathrm{E}_k$**. Известно, что**

$$f=\max_{(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathrm{E}_k)^n}\left[\min[J_{\{a_1\}}(x_1),\ldots,J_{\{a_n\}}(x_n),f(a_1,\ldots,a_n)]\right],$$

здесь и далее при $\varnothing\neq M\subseteq\mathrm{E}_k$ **определена функция**

$$J_M(x)=\begin{cases}k-1, & x\in M,\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

~ аналог представления булевой функции в виде совершенной ДНФ.

Нурлыбаев А.Н. О нормальных формах k-значной логики // Сборник работ по математической кибернетике. – М.: ВЦ АН СССР, 1976. – Вып. 1. С. 56-68.

Абдугалиев У.А. О нормальных формах k-значной логики // Кибернетика. — 1967. №1.-С. 16-20.

Функции k-значной логики

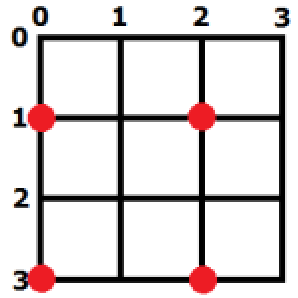
Элементарной конъюнкцией называется выражение

$$Q = \min[J_{M_1}(x_1), \ldots, J_{M_n}(x_n), \gamma],$$

где $|\{x_1, \ldots, x_n\}| = n$, $\gamma \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ **.**

А.Н. Нурлыбаев

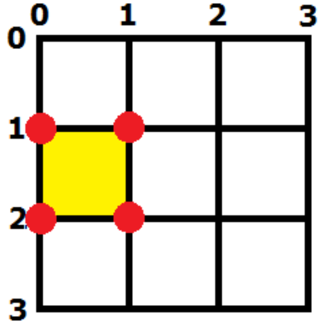
$\varnothing \neq M_i \subseteq \mathrm{E}_k$



У.А. Абдугалиев

$M_i = [a_i, b_i] = \{a_i, a_i + 1, \ldots, b_i\}$,

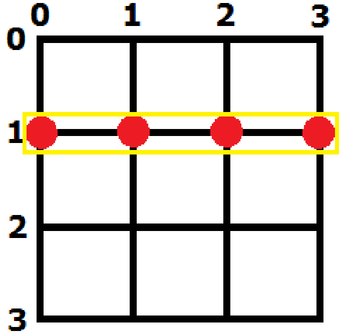
$0 \leq a_i \leq b_i \leq k - 1$



А.Ю.Коган

$M_i = \{\sigma_i\} \subseteq \mathrm{E}_k$ **или** $M_i = \mathrm{E}_k$

$\leq r(k-1)n$ **конъюнкций**



Функции k-значной логики

Бинарные функции, т.е. функции вида $f:(\mathrm{E}_k)^n \to \{0,1\}$.

Обобщены на k-значный случай также

- **операции склеивания,**
- **алгоритм Квайна,**
- **аналитический критерий поглощения конъюнкции нормальной формой,**
- **построен наилучший локальный алгоритм индекса 1 для синтеза ДНФ типа сумма тупиковых.**

Тестовый подход к задаче ДНФ-реализации

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
		тест				

Лемма. ДНФ

$$D' = D_T \vee \bigvee_{j=t+1}^{n} \bigvee_{i=1}^{k} K_j^i,$$

где D_T – произвольная ДНФ функции $f_T(x_1,\ldots,x_t)$, реализует функцию f.

$$K_j^i = x_j^{1-\alpha_j^i} \mathbin{\&} \mathop{\&}_{q\in T(j)} x_q^{\alpha_q^i}$$

Аналогично строится тупиковая ДНФ.

Почти все конъюнкции имеют собственные околонулевые точки.

Тестовый подход к задаче ДНФ-реализации

Дьяконов А.Г. Построение дизъюнктивных нормальных форм в логических алгоритмах распознавания // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, Т. 42, №12, С. 1899-1907.

Дьяконов А.Г Тестовый подход к реализации дизъюнктивными нормальными формами булевых функций с малым числом нулей // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, Т. 42, №6, С. 924-928.

Тестовый подход к задаче ДНФ-реализации

Если T содержит все столбцы вида (*), то алгоритмом A_D^* можно построить ДНФ D^* такую, что

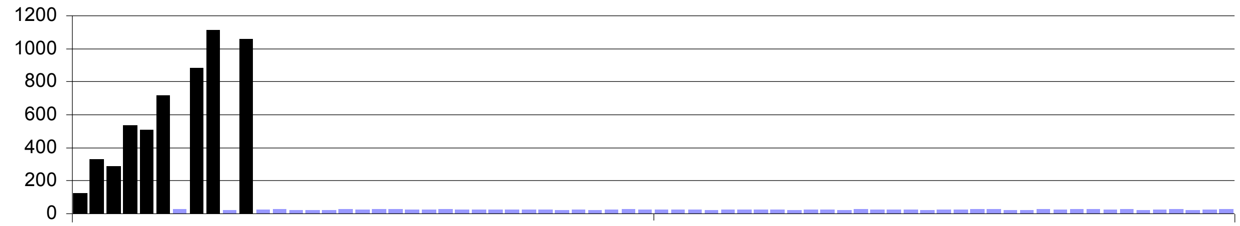
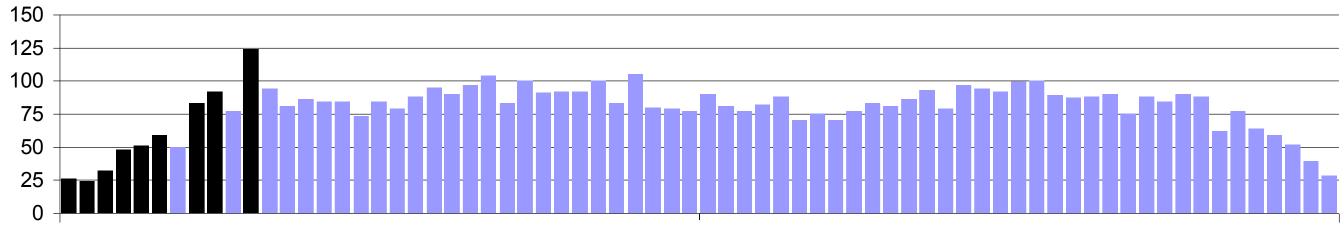
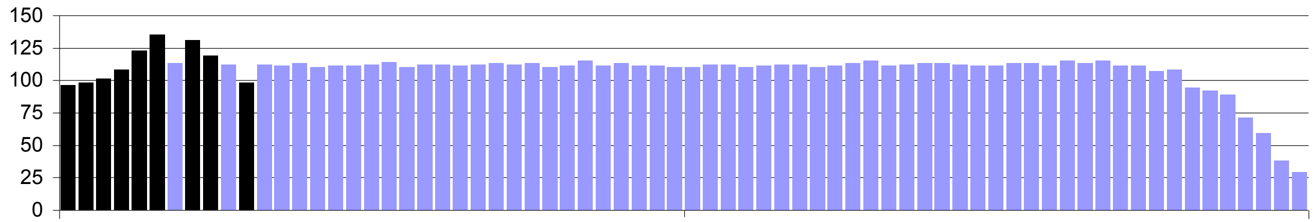
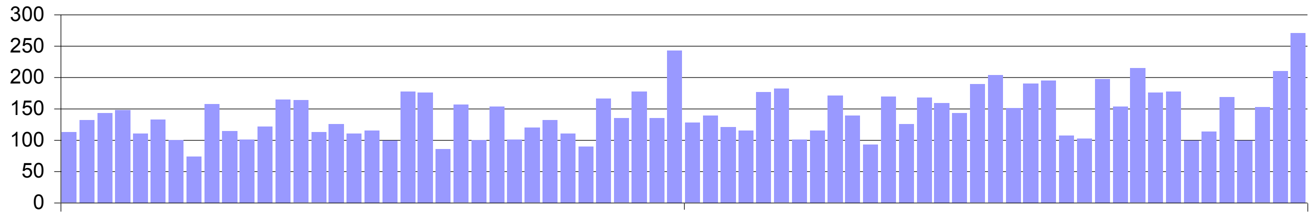
$$|D^*| \le |D_T| + 2(n-t).$$

Построение «равномерных» ДНФ

$$h_{\text{равн}}(D) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \le a < b \le n} |p_a - p_b|,$$

где $\boldsymbol{p}(D) = (p_1, \ldots, p_n)$, p_q – число конъюнкций во множестве D, в которые входит буква x_q или $\bar{x}_q$, $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Построение «равномерных» ДНФ

Тупиковая ДНФ тестовым методом (T(j)=T; L=1449; hравн=143,3; t<1 сек) матрицей нулей размера 50×100	
в тупиковую ДНФ, построенную методом плавающего теста (T(j)={1,2,…,j-1}; L=1146; hравн=20,25; t<1 сек)	
в «равномерную» ДНФ, построенную тестовым методом (L=1559; hравн=12,31; t<1 сек)	
в ДНФ, построенную по обобщённой формуле С.В. Яблонского (1-е умножение; L=2125; hравн=43,95; t<1 сек)	

Явные ДНФ-формулы

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$[D_f]^F = \bigvee_{1 \le a < b \le k} x_a x_b \vee \bigvee_{j=k+1}^{n} \left(\bar{x}_j \mathop{\&}_{q \in Z(j)} \bar{x}_q \vee x_j \mathop{\&}_{q \in E(j)} \bar{x}_q \right)$$

$$2n + k(k-5)/2$$

$$\mathbf{p}(D_f) = (n-1, \dots, n-1, 2, \dots, 2)$$

$$[D]^F = \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n \vee \bigvee_{j=k+1}^{n} \left(\bigvee_{i \in Z(j)} x_i x_j \vee \bigvee_{i \in E(j)} x_i \bar{x}_j \right)$$

$$(n-k)k + 1$$

$$\mathbf{p}(D) = (n-k+1, \dots, n-k+1, k, \dots, k)$$

Построение ДНФ последовательным перемножением

$$D^F = D_1^F \& \ldots \& D_y^F$$

Журавлев Ю.И., Платоненко И.М. Об экономном умножении булевых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. Т. 24. № 1. – С. 164–166.

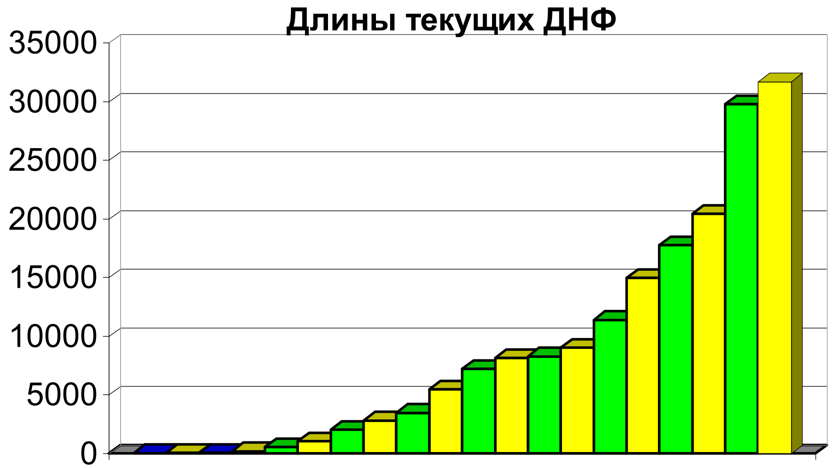
Трофимов С.В. Об оптимальном уменьшении числа уравнений в системах нельсоновского типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. Т. 26. № 10. – С. 1552–1558.

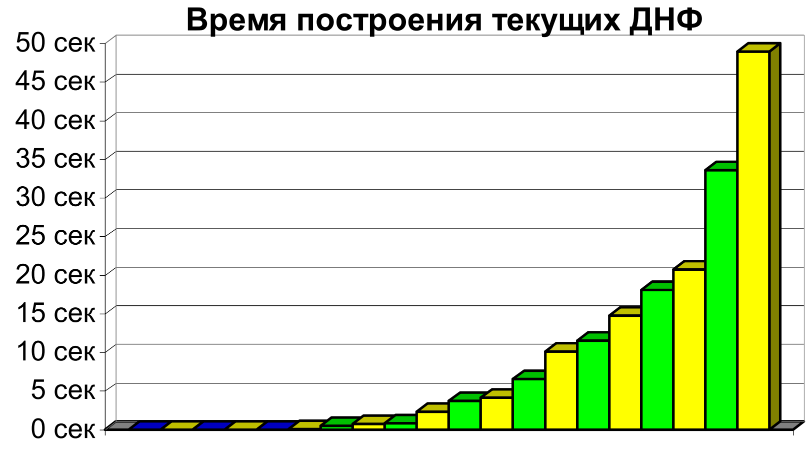
Платоненко И.М. О реализации алгоритмов типа «Кора» с помощью решения систем булевых уравнений специального вида // Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ АН СССР, 1983. – 21с.

Дьяконов А.Г. Построение ДНФ последовательным перемножением // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2003, Т. 43, №10, С. 1589-1600.

Предложены алгоритмы эффективного умножения и эффективного умножения на скобку КНФ

Случайная матрица интервалов размера 20×20





Современные компьютеры

размеры	конъюнкций	время
25×25	58 922	1.6 сек
25×30	138 092	11 сек
30×25	95 418	5 сек
30×30	237 977	24 сек

Обобщённая формула С.В. Яблонского

Для произвольных множеств $I_1,\ldots,I_q$, $q \geq 2$, справедливо

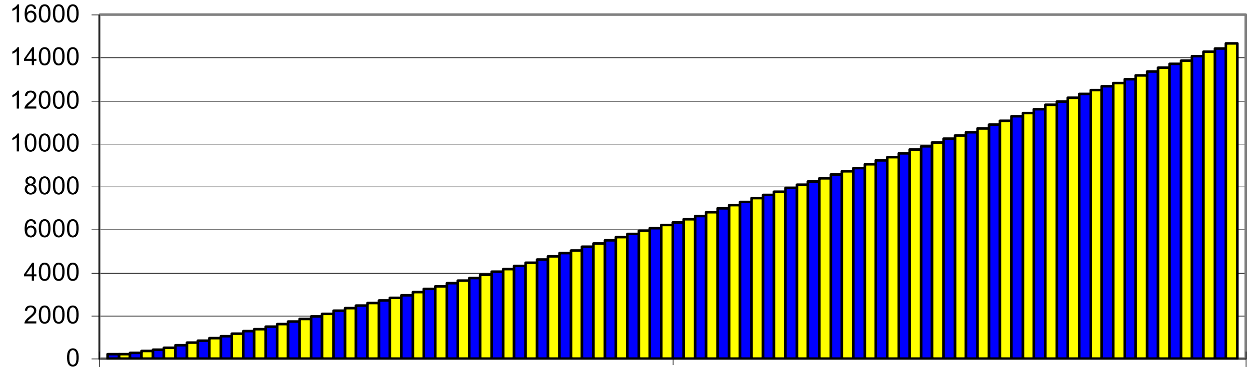
$$I_1 \setminus I_2 \cup \ldots \cup I_{q-1} \setminus I_q \cup I_q \setminus I_1 = \bigcup_{i=1}^{q} I_i \setminus \bigcap_{i=1}^{q} I_i .$$

$$D = (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_3\bar{x}_6 \vee \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_6 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_5)$$
$$\& (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6 \vee x_7)$$

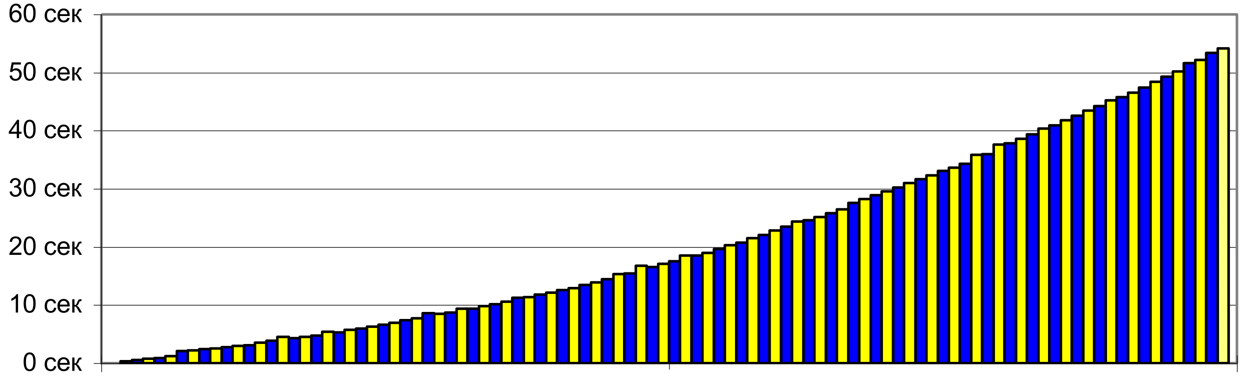
$$D = (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5) \vee (\bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_6) \vee (x_1 x_2 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_6)$$

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5) = (\bar{x}_1\bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_5 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 x_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_5 x_2) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5$$

Длины текущих ДНФ при &-умножении по обобщённой формуле С.В. Яблонского (n=200, k=100, L=14651, hравн=102,9)



Время построения этих текущих ДНФ



Современные компьютеры: 0.5 сек

Построение ДНФ последовательным перемножением

Пусть булева функция f задана своей матрицей нулей $M_f = [M^y | M^x]$,

$$M^y = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_t^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^k & \dots & \beta_t^k \end{bmatrix} \\ y_1, \dots, y_t \end{array} \quad M^x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^k & \dots & \alpha_n^k \end{bmatrix} \\ x_1, \dots, x_n \end{array}.$$

Определение. **ДНФ функции f называется тестовой (относительно переменных $y_1, \dots, y_t$), если она состоит из конъюнкций, в каждую из которых входит не более одной буквы из множества $\{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, а дизъюнкция конъюнкций, в которые не входит ни одной буквы из этого множества, реализует булеву функцию с матрицей нулей M^y.**

Тестовая ДНФ функции f всегда существует и может быть построена тестовым алгоритмом A_D^*.

Теорема.

Если ДНФ D^F, реализующая функцию f, является тестовой, то

$$\mathrm{pr}_t[\ldots\mathrm{pr}_2[\mathrm{pr}_1[D]]\ldots] = D_{\text{сокр}},$$

где $D^F_{\text{сокр}}$ – сокращённая ДНФ булевой функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ с матрицей нулей M^x.

$$D|_{x_j^\sigma} = \{x_j^\sigma K \mid x_j^\sigma K \in D\},\ D|_{x_j=\sigma} = D \setminus D|_{x_j} \setminus D|_{\bar{x}_j} \cup \{K \mid x_j^\sigma K \in D\},$$

$$\mathrm{Sm}[D] = D \setminus \{K \in D \mid \exists K' \in D : N(\{K\}) \subset N(\{K'\})\},$$

$$\mathrm{pr}_j[D] = \mathrm{Sm}[D \setminus D|_{y_j} \setminus D|_{\bar{y}_j} \cup \{K_1K_2 \mid y_jK_1 \in D|_{y_j},\ \bar{y}_jK_2 \in D|_{\bar{y}_j}\}],$$

10101010 101001010
01110101 010101010
11010100 101111100
01000011 000110101
11110101 011001101

y_1 $\bar{y}_5$ x_2

$\bar{y}_2 y_3$ $\bar{x}_4$

y_1 $\bar{y}_3$

y_2 y_7

Частный случай – метод Нельсона

Пусть M^x **– произвольная булева матрица,**

$$M^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

0000	101001010
1000	010101010
0100	101111100
0010	000110101
0001	011001101

$$D = \bigvee_{j=1}^{n} \bar{y}_1 \dots \bar{y}_t x_j^{1-\alpha_j^1} \vee \bigvee_{i=1}^{k-1} \bigvee_{j=1}^{n} y_i x_j^{1-\alpha_j^{i+1}}.$$

Тестовая ДНФ $D \vee \bigvee_{1 \le j < q \le t} y_j y_q$ **реализует функцию** f**, а конъюнкции вида** $y_j y_q$ **не участвуют в операциях** $\mathrm{pr}[\cdot]$**.**

$\mathrm{pr}_r[\dots \mathrm{pr}_1[D]]$ **~ последовательное умножение скобок сокращённой КНФ в методе Нельсона.**

Частный случай – метод Блейка

101001010	101001010
010101010	010101010
101111100	101111100
000110101	000110101
011001101	011001101

$$M^y = M^x$$

$D'(y_1,\ldots,y_n)$ **– произвольная ДНФ для** M^y**.**

$$D = D' \vee \bigvee_{j=1}^{n} y_j \bar{x}_j \vee \bigvee_{j=1}^{n} \bar{y}_j x_j$$

Для $D^*(r+1) = \mathrm{pr}_r[\ldots \mathrm{pr}_1[D]]$ **справедливо**

$$D^*(r+1) = \mathrm{pr}_r[D^*(r)] = \mathrm{sm}[\{x_r K \mid y_r K \in D^*(r)\} \cup \{\bar{x}_r K \mid \bar{y}_r K \in D^*(r)\} \cup$$
$$\cup \{K_1 K_2 \mid y_r K_1, \bar{y}_r K_2 \in D^*(r)\} \cup D^*(r) \setminus D^*(r)|_{y_r} \setminus D^*(r)|_{\bar{y}_r}].$$

$\mathrm{pr}_r[\ldots \mathrm{pr}_1[D]]$ **~ реализация метода Блейка**

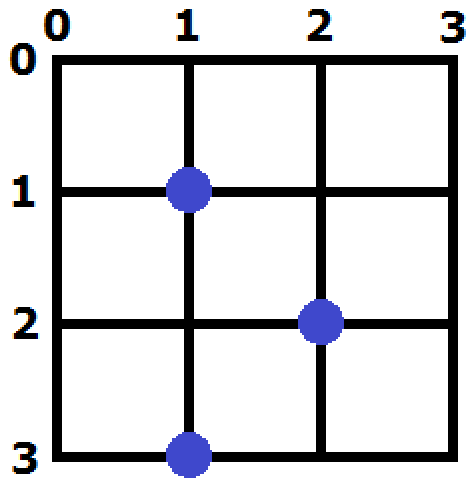
k-значный случай

Обобщение большинства алгоритмов

Например, тестовый подход

Дьяконов А.Г. Кодировки и их использование при ДНФ-реализации бинарных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, Т. 44, №8, С. 1511-1520.

Кодировки



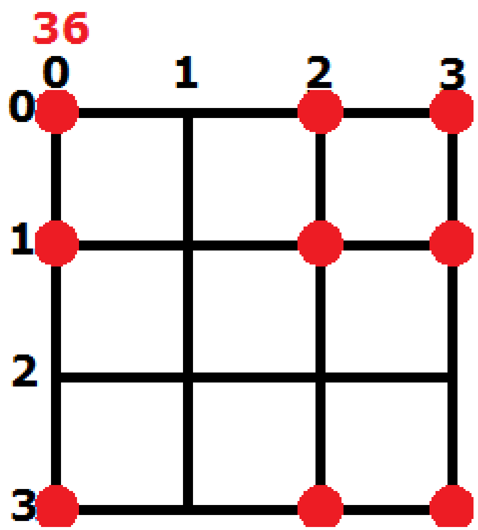
матрица нулей

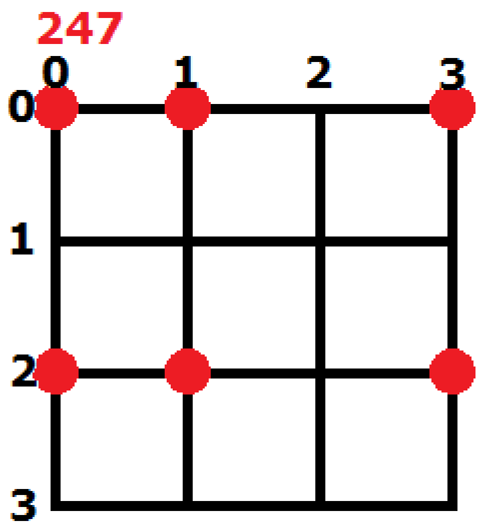
11
22
31

кодировка

0 - 1000
1 - 0100
2 - 0010
3 - 0001

12345678
01000100
00100010
00010100





Кодировки

$$M_{\delta_E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Теорема. **Всевозможным собственным тупиковым столбцовым покрытиям матрицы M_{f_2} при кодировке δ_E взаимно однозначно соответствуют всевозможные простые Н-импликанты функции f_k.**

Теорема. **Всевозможным кодирующим простым импликантам функции f_2, составленным из букв без отрицаний, при кодировке δ_E взаимно однозначно соответствуют всевозможные простые Т-импликанты функции f_k.**

Кодировки

$$M_{\delta_M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теорема. Всевозможным кодирующим конъюнкциям из сокращённой ДНФ функции f_2 при кодировке δ_M взаимно однозначно соответствуют всевозможные квазипростые импликанты функции f_k.

Определение. Допустимая для бинарной функции f элементарная A-конъюнкция $\min[J_{[a_1,b_1]}(x_1),\ldots,J_{[a_n,b_n]}(x_n),1]$ называется квазипростой импликантой функции f, если для всех $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ справедливо

1. Если $a_j > 0$, то конъюнкция

$\min[J_{[a_1,b_1]}(x_1),\ldots,J_{[0,b_j]}(x_j),\ldots,J_{[a_n,b_n]}(x_n),1]$ **не является допустимой для f.**

2. Если $b_j < k-1$, то конъюнкция

$\min[J_{[a_1,b_1]}(x_1),\ldots,J_{[a_j,k-1]}(x_j),\ldots,J_{[a_n,b_n]}(x_n),1]$ **не является допуст-ой для f.**

Сложность ДНФ-реализации

оценка	автор	комментарий
$O(nk)$	**Дьяконов, 2002, Mubayi. Turan, Zhao, 2006**	**Верхняя, все ф-ии**
$O\left(\frac{nk}{\log_2 n}\right)$	**Журавлёв, Коган, 1985**	**Верхняя, п.в.** $k \le 2^{n/2}$
$\Omega(n)$	**Дьяконов, 2001**	**Нижняя, изол. ноль**
$\Omega\left(\frac{nk}{\log_2 n \log_2 nk}\right)$	**Коган, 1987**	**Верхняя, п.в.** $k \le 2^{n/2}$
$\Omega\left(\frac{nk}{\log_2 n + \log_2 k}\right)$	**Максимов, Гранин, 2014**	**Нижняя, п.в.** $k \le 2^{n/2}$

из статьи С.С. Гранин, Ю.В. Максимов Сложность дизъюнктивных нормальных форм и полу-эффект Шеннона в некоторых подклассах булевых функций // arXiv:1501.03444v1 [math.CO] 14 Jan 2015